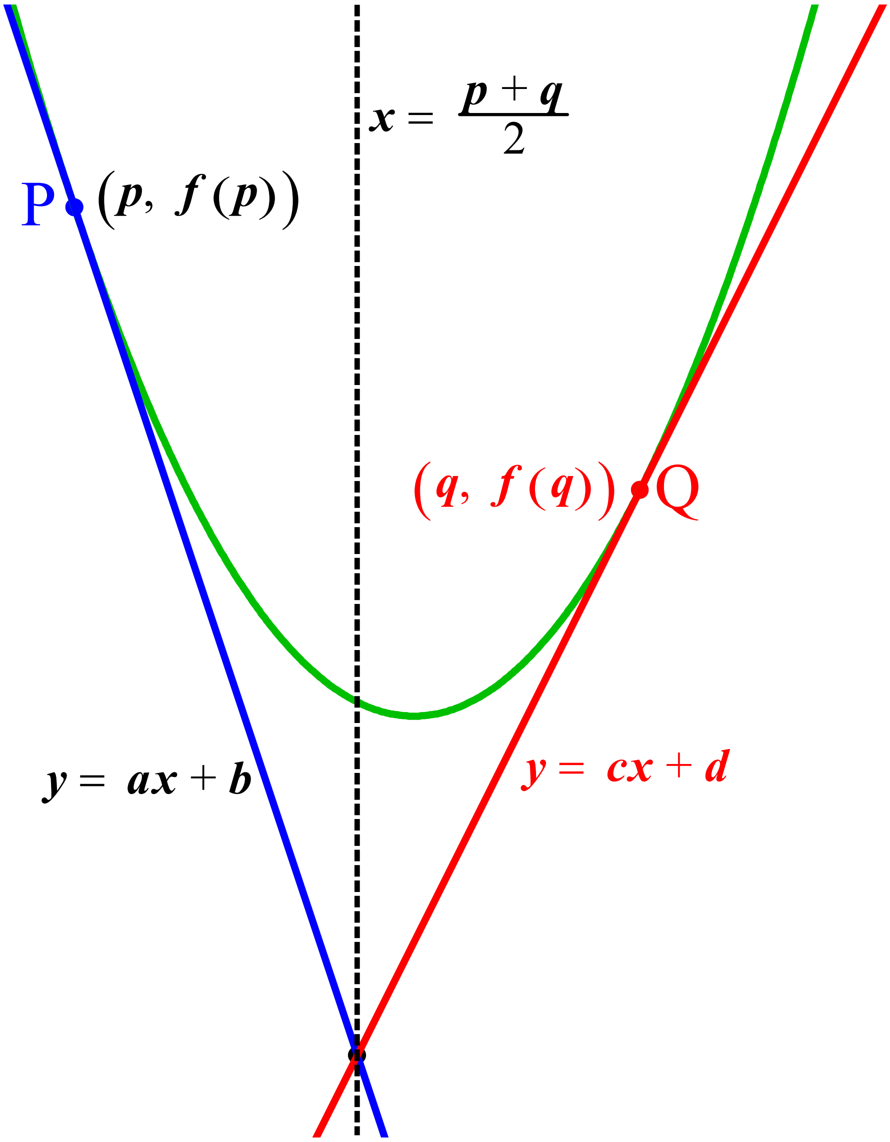
放物線と **2** 接線に囲まれた部分の面積について



2 次関数 $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ について，
接点を $\mathrm{P}(p, f(p))$ とする接線の式を $y = ax + b$
接点を $\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする接線の式を $y = cx + d$
とすると，

接線の交点の x 座標は $ax + b = cx + d$ より， $x = \dfrac{-b+d}{a-c}$ ・・・①

また，
$f(x) - (ax+b) = A(x-p)^2$ ・・・②
$f(x) - (cx+d) = A(x-q)^2$ ・・・③

②−③より，

$-(a-c)x-b+d=-2A(p-q)x+A(p-q)(p+q)$

等式は任意の x について成り立つから，

$a-c=2A(p-q)$，　$-b+d=A(p-q)(p+q)$

よって，$\dfrac{-b+d}{a-c}=\dfrac{p+q}{2}$　　・・・④

①，④より，

2 接線の交点の x 座標は $x=\dfrac{p+q}{2}$

（2 接線の交点の x 座標は点 P の x 座標と点 Q の x 座標の中点である）

$$\begin{aligned}\therefore S&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}A(x-p)^2\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}A(x-q)^2\,dx\\&=\frac{A}{3}\Big[(x-p)^3\Big]_p^{\frac{p+q}{2}}+\frac{A}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_{\frac{p+q}{2}}^{q}\\&=\frac{A}{3}\cdot\frac{(q-p)^3}{8}+\frac{A}{3}\cdot\frac{(q-p)^3}{8}\\&=\frac{A}{12}(q-p)^3\end{aligned}$$

また，

$x=\dfrac{p+q}{2}$ と $y=f(x)$ と $y=ax+b$ で囲まれた部分の面積＝$\dfrac{A}{24}(q-p)^3$

$x=\dfrac{p+q}{2}$ と $y=f(x)$ と $y=cx+d$ で囲まれた部分の面積＝$\dfrac{A}{24}(q-p)^3$ より，

$x=\dfrac{p+q}{2}$ は $y=f(x)$ と 2 接線で囲まれた部分の面積を 2 等分することがわかる。